POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

**„W POGONI ZA INDEKSEM"**

**ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI**

rok szkolny 2019/2020

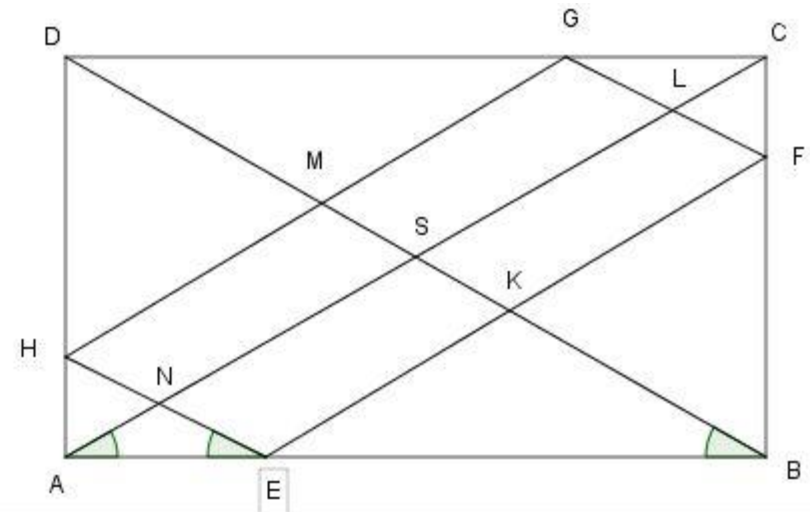
1. Cyfra jedności liczby $2003^{2003}$ jest taka sama jak cyfra jedności liczby $3^{2003}$. Aby tę cyfrę wyznaczyć szukamy cyfrę jedności kilku początkowych potęg liczby 3.
   $3^1=3$ $3^2=9$ $3^3=27$ $3^4=81$ $3^5=243$ $3^6= 729$ itd. Widzimy, że cyfry jedności kolejnych potęg liczby 3 powtarzają się cyklicznie a długość tego cyklu jest równa 4. Ponieważ $2003=4\times500+3$., więc cyfra jedności liczby $3^{2003}$ jest taka sama jak cyfra liczby $3^3$, czyli równa jest 7.
   Odp.: Cyfrą jedności liczby 20032003 jest cyfra 7.
2. Dowolna liczba dwucyfrowa spełniająca warunek zadania – 10a+ b, gdzie a=b-6.
   Otrzymujemy więc 10a+b=10(b-6)+b=10b-60+b=11b-60. Liczba powstała po przestawieniu cyfr będzie miała postać 10b+b-6=11b-6. Po zapisaniu różnicy obu wyrażeń otrzymamy: 11b-60-(11b-6)= 11b-60-11b+6=-54.
   Odp.: Różnica tych liczb wynosi (-54).
3. Liczba trzycyfrowa : 100x+10y+z
   Liczba trzycyfrowa po przestawieniu cyfr setek i jedności : 100z+10y+x. Wyznaczamy różnicę: (100z+10y+x) – (100x+10y+z)= 99x-99x=99(z-x). Ponieważ 99 dzieli się przez 9 całe wyrażenie również dzieli się przez 9.
4. Liczba $10^{101}$ ma 102 cyfry i zbudowana jest z jedynki i 101 zer. Zatem liczba $10^{101}-9$ będzie zbudowana ze 100 dziewiątek i jednej jedynki. Suma jej cyfr jest zatem równa $100\times9+1=901$.
   Odp.: Suma cyfr liczby $10^{101}-9$ wynosi 901.
5. Cyfrą jedności liczby $11^{10}$ jest 1. Jeśli więc od liczby o cyfrze jedności jeden odejmiemy jedynkę otrzymamy liczbę o cyfrze jedności zero. Liczba taka jest podzielna przez 10. Stąd $11^{10} – 1$ jest liczbą podzielną przez 10.
6. Odp: $7+4\sqrt{3}$
7. Odp: $5+3\sqrt{3}-5\sqrt{2}$
8. Oznaczmy np. przez x - łączne miesięczne dochody, przez 7/8x–łączne miesięczne wydatki.
   Korzystając z zależności podanych w zadaniu układamy i rozwiązujemy równanie:
   5/8x+3/8x-1200 =7/8x; otrzymujemy x= 9600 zł,
   Obliczamy miesięczny dochód pana Jana: 3/8*9600 = 3600 zł, następnie obliczamy roczny dochód pana Jana: 43200 zł.
   Odp. Roczny dochód pana Jana to 43200 zł
9. I sposób
   Obliczamy masy trzech różnych stopów:7x+10x+18x=350, 35x= 350, x= 10; I stop 7·10=70g, II stop 10·10= 100g, III stop18·10=180g(masy stopów);
   Obliczamy masy srebra w poszczególnych stopach: 7y+ 9y+12y= 0,72·350 czyli
   7y+ 9y+12y=252 stąd 28y= 252 zatem y= 9 I stop 7·9 = 63 g, II stop 9·9 = 81 g,
   III stop 12·9 = 108 g(masa srebra w stopach)i obliczamy procent srebra w poszczególnych stopach.
   W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra.
   Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.
   II sposób
   Obliczamy, że w I stopie jest 7/35=28/140 ogólnej masy i 7/28=35/140 ogólnego srebra, a stosunek tych ułamków (masy srebra do ogólnej masy) to 35/28. Analogicznie obliczamy, że w II stopie jest 10/35=40/140 ogólnej masy oraz 9/28=45/140 masy srebra, a stosunek tych ułamków to 45/40, zaś w III stopie jest 18/35=72/140 ogólnej masy i 12/28=60/140 masy srebra, a stosunek tych ułamków to 60/72;

Stwierdzamy, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop: $35/28 > 1$, II stop: $45/40 > 1$, III stop: $60/72 < 1$) oraz wnioskujemy stąd, że w III stopie jest najmniej srebra.
Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie

10. I sposób: Obliczamy, że w pierwszej promocji 1,2 litra soku kosztuje 24 zł. Zatem 1 litr soku kosztuje 20 zł. Obliczamy, że w drugiej promocji 1litr soku kosztuje 19,20 zł. Porównujemy ceny za 1 litr soku w obydwu promocjach i wnioskujemy, że druga promocja jest korzystniejsza dla klienta.
    II sposób: Obliczamy, że w pierwszej promocji za 24 zł otrzymamy 1,2 l soku. Obliczamy, że w drugiej promocji za 24 zł otrzymamy 1,25 l soku.
    Odpowiedź: Druga promocja jest korzystniejsza.
11. Oznaczamy : x-objętość pierwszej beczki: $x - 320 = 2/5x + 2/5 * 5/6x$; $x = 1200$
    Obliczamy objętość drugiej: $2/5 \cdot 1200 = 480$ i trzeciej beczki $1200 - 480 - 320 = 400$
    Odpowiedź: Pojemność pierwszej beczki: 1200 litrów, drugiej beczki:480 litrów, trzeciej beczki: 400 litrów.
12. Oznaczamy : 10 -liczba monet pięciogroszowych, $x$-liczba monet dziesięciogroszowych, $2x-10$-liczba monet dwudziestogroszowych. Zapisujemy i rozwiązujemy odpowiednie równanie: $10 \cdot 5 + x \cdot 10 + (2x-10) \cdot 20 = 600$. Wyznaczamy liczbą monet dziesięciogroszowych $x=13$, określamy jaką częścią wszystkich monet były monety dziesięciogroszowe.
13. Oznaczamy : x-kwota zysku $2,04 \cdot 100 = 204$ (zł); $x = 0,15 \cdot (204 + x)$. Poprawne rozwiązanie równania: $x - 0,15x = 30,6$; $0,85x = 30,6$; $x = 36$zł. Obliczenie ceny sprzedaży jabłek $204 + 36 = 240$ (zł) $240 : 100 = 2,40$ (zł).
14. Oznaczamy: x – liczba rzutów w pierwszym meczu $0,3x + 16 = 0,5(x+20)$, $x = 30$
15. Niech n–liczba pracowników dodatkowo zatrudnionych. Pracę planowano na 26 dni, ale wykonano ją 4 dni przed terminem. Wynika stąd, że czas, jaki przepracowali robotnicy zatrudnieni od początku, jest równy 26-4=22dni. Pracownicy zatrudnieni dodatkowo pracowali o 6 dni krócej niż zatrudnieni od początku. Zatem czas jaki przepracowali robotnicy zatrudnieni dodatkowo jest równy 22-6=16 dni. Z planowanego na początku czasu pracy wynika, że 28 pracowników wykonałoby pracę w ciągu 26 dni, zatem jeden pracownik wykonałby tę pracę w czasie 28 razy dłuższym, czyli w ciągu $26*28=728$ dni. W ciągu jednego dnia jeden pracownik wykonałby zatem 1/728 tej pracy. Część pracy, jaką wykona w ciągu 22 dni 28 pracowników można opisać wyrażeniem: $22*28*1/728=11/13$, natomiast część pracy, jaką wykona w ciągu 16 dni n pracowników można opisać wyrażeniem:$16n*1/728=2n/91$. Pracownicy zatrudnieni od początku i zatrudnieni dodatkowo wykonali całą pracę, zatem $11/13+2n/91=1$. Wynika stąd, że $2n/91=1-11/13=2/13$. Ostatecznie n=7.
16. Oznaczmy: x masę stopu, w którym metal A stanowi 40%, przez y masę stopu, w którym metal A stanowi 30%. W nowym stopie ilość metalu A będzie stanowić $4/10x+3/10y$. Ilość metalu B to $6/10x+7/10y$. Wykorzystując proporcję między masami metali A i B uzyskujemy równanie: $(4/10x+3/10y)/(6/10x+7/10y) = 3/5$, po przeliczeniu $x=3y$, czyli $x/y = 3$. Stopy należy więc dobrać w proporcji 3 : 1.
17. Oznaczamy: x–liczba ton ładunku załadowanego przez dźwig o mniejszej mocy wciągu godziny; x+ 10,5 –liczba ton ładunku załadowanego przez dźwig o większej mocy wciągu godziny.
    I sposób:

66/x –czas załadunku 66 ton przez dźwig o mniejszej mocy;108/(x+10,5) – czas załadunku 108 ton przez dźwig o większej mocy. Ułożenie równania:66/$x$=108/ ($x$+10,5); 66(x+ 10,5) = 108x; 66x+ 693 = 108x; 42x= 693; x=16,5.
Obliczenie czasu załadunku 1485 ton przez dźwig o mniejszej mocy: 1485 :16,5 = 90 godzin.
II sposób:
t–czas załadunku 108 ton przez dźwig o większej mocy lub 66 ton przez dźwig o mniejszej mocy; Ułożenie równań: (x+ 10,5)t= 108; xt= 66. Obliczenie czasu załadunku: xt+ 10,5t= 108; 66 + 10,5t= 108; 10,5t= 42; t= 4.
Obliczenie ilości ton ładunku załadowanego przez dźwig o mniejszej mocy wciągu godziny:4x= 66; x= 16,5
Obliczenie czasu załadunku 1485 ton przez dźwig o mniejszej mocy: 1485 :16,5 = 90.

18. Boki nie są podane w kolejności występowania. Zadanie nie jest jednoznaczne. Jest kilka rozwiązań.
19. Po czasie t od spotkania pies przebył drogę 6t a kot 2,5t więc odległość wyniosła
d= $\sqrt{(6t)^2+(2,5t)^2} = t\sqrt{36+6,25} = 6,5t$
zatem d=13, gdy t=2 godziny
20. Odp:18 metrów
21. Odp: 21cm,35cm
22. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
23. P= $27\sqrt{3}$ Ob.=30
24. Odp: Nie zmieszczą się.
25. P=16 cm$^2$
26.




Przekątne w prostokącie przecinają się w połowie swojej długości, zatem ∡BAS ≡∡ABS. Ponieważ HE||BD, więc ∡SBA ≡∡NEA. Wobec tego △AEN jest równoramienny i |AN| = |NE|. Analogicznie dowodzimy, że |LF| = |LC|. Zatem |NE| +|EF| + |LC| = |AC| a szukany obwód wynosi 2|AC|. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa |AC|2 = 62 + 82, czyli |AC| = 10 a obwód szukanego równoległoboku wynosi 20. Każdy z równoległoboków wpisanych w ten prostokąt o bokach równoległych do przekątnych ma obwód o długości 20.

27. Oba ramiona mogą tworzyć z daną podstawą niezależnie od siebie kąt ostry lub rozwarty. Podane zależności są zatem spełnione w czterech sytuacjach:
    I - oba kąty ostre - wówczas druga podstawa ma długość 50-(9+16)=25,
    II - oba kąty rozwarte - wówczas druga podstawa ma długość 50+(9+16)=75,
    III - kąt między daną podstawą a ramieniem 15 ostry, a między podstawą a drugim ramieniem rozwarty - wówczas druga podstawa ma długość 50-9+16=57,
    IV - kąt między daną podstawą a ramieniem 15 rozwarty, a między podstawą a drugim ramieniem ostry - wówczas druga podstawa ma długość 50+9-16=43.
28. Jeśli sześcian jednostkowy zostanie umieszczony w rogu dużej kostki, to na powierzchni będą widoczne trzy jego ściany. Jeśli znajduje się na którejś z krawędzi kostki, to widoczne będą jego dwie ściany; w przeciwnym razie co najwyżej jedna ściana jest widoczna. Sześcian ma 8 rogów i 12 krawędzi, z których każda zawiera (poza narożnymi) dwa sześciany – w tych miejscach Ela może więc umieścić 8+2*12=32 sześcianów i jasne jest, że aby uzyskać możliwie największą białą powierzchnię musi umieścić tam białe sześciany jednostkowe.
    Odp: Białe ścianki stanowią ¾ powierzchni kostki.
29. Odp: 216$m^2$
30. Odp: 12
31. Odp: 400 $cm^3$
32. Odp: Trójkątem równobocznym
33. Odp: 12
34. Oznaczmy: k- długość krawędzi sześcianu.
    6k*k=12k, czyli k=2. Zatem V=8 $j^3$
35. Odp: Można uzyskać 10 różnych kostek.