X POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

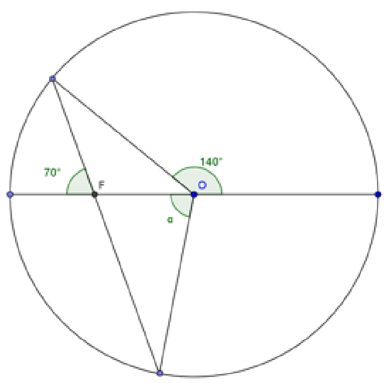
„W POGONI ZA INDEKSEM"

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE
rok szkolny 2018/2019

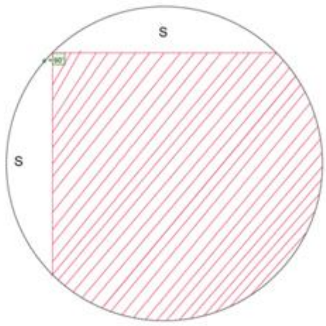
1. Liczbę nazywamy dobrą, jeśli w jej zapisie dziesiętnym żadna cyfra się nie powtarza oraz iloczyn jej cyfr jest równy 360. Wyznacz największą liczbę o tej własności.
2. Podaj największą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 7 daje iloraz równy reszcie.
3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które są równe potrojonej sumie swoich cyfr.
4. Piotr usunął jedną cyfrę z czterocyfrowej liczby pierwszej i otrzymał 630. Jaka była wyjściowa liczba pierwsza?
5. Znajdź cyfrę jedności liczby $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2017^2$
6. Dzień nazwiemy szczęśliwym, jeżeli jego zapis w formacie DD.MM.RRRR zawiera osiem parami różnych cyfr, gdzie DD oznacza dzień, MM miesiąc, a RRRR – rok oraz dla dni i miesięcy o numerach mniejszych od 10 za pierwszą cyfrę przyjmujemy zero. Przykładowo 26.04.1785 był dniem szczęśliwym. Kiedy nadejdzie najbliższy (licząc od dzisiaj) szczęśliwy dzień?
7. W pewnym sklepie sprzedawane są tabliczki mlecznej, białej oraz gorzkiej czekolady, wszystkie po tej samej cenie. Pewnego dnia przychód sklepu ze sprzedaży mlecznej czekolady wyniósł 270, ze sprzedaży białej – 189, zaś ze sprzedaży gorzkiej – 216. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba tabliczek sprzedanych tego dnia w sklepie?
8. Liczby 14, 20 oraz n spełniają następujący warunek: Iloczyn dowolnych dwóch z nich jest podzielny przez trzecią. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których powyższy warunek jest spełniony.
9. Wyznacz dwie ostatnie cyfry iloczynu:
   $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$
10. Znajdź wszystkie czterocyfrowe palindromy, które mogą być zapisane jako suma dwóch trzycyfrowych palindromów.
    Uwaga! Palindrom to liczba, która czytana od lewej i prawej strony jest taka sama, np. 2019102. Liczba nie może zaczynać się od cyfry 0.
11. Na sprawdzianie z matematyki I zadanie rozwiązało 80% uczniów, II – 85%, III – 90%, a IV – 98%. Jaka część uczniów rozwiązała wszystkie zadania?
12. Wujek Antoni złowił pewną liczbę ryb. Trzy największe spośród nich dał cioci Halinie, w wyniku czego waga złowionych ryb zmalała o 35%. Następnie trzy najmniejsze ryby dał sąsiadowi, zmniejszając wagę pozostałych ryb o 5/ 13 . Ile ryb złowił wujek Antoni?
13. Pewien hinduski maharadża pozostawił swoim sześciu synom w spadku sporą ilość wielkich diamentów jednakowej wartości, przy czym rozporządził, że pierwszy z synów weźmie jeden diament i 1 /7 pozostałych, drugi – dwa diamenty i 1 /7 pozostałych i tak dalej. Po dokonanym podziale okazało się, że każdy z synów otrzymał tę samą ilość diamentów. Ile było wszystkich diamentów?
14. Dokładnie 60% uczniów pewnego gimnazjum spędziło wakacje w górach, a dokładnie 1 /3 uczniów tej szkoły – nad morzem. Ponadto dokładnie 1/ 15 pozostałych uczniów spędziła wakacje za granicą. Jaka jest najmniejsza liczba uczniów tego gimnazjum?. Odpowiedź uzasadnij.
15. W drodze do domu Piotr postanowił zatankować, przez co czas jego podróży wydłużył się o 10%. Kolejnego dnia, przemierzając tę samą drogę, Piotr tankował dwa razy dłużej, przez co całkowity czas jego podróży wyniósł jedną godzinę. Ile czasu zajęłaby podróż Piotrowi, gdyby nie tankował?
16. Szkoła zakupiła pewną ilość ołówków i postanowiono rozdać je uczniom klas pierwszych. W szkole są trzy klasy pierwsze: I a, I b i I c. Wiadomo, że gdyby ołówki zostały rozdane po równo wszystkim uczniom, każdy otrzymałby po 16 ołówków. Gdyby zostały rozdane po równo uczniom

klasy I a, każdy uczeń tej klasy dostałby po 48 ołówków. Jeśli zostałyby rozdane tylko uczniom klasy I b, każdy z nich otrzymałby po 40 ołówków. Po ile ołówków dostałby każdy uczeń klasy I c, gdyby postanowiono je rozdać uczniom tylko tej klasy?

17. Bombki są sprzedawane w dwóch rodzajach opakowań. W większych pudełkach jest w sumie 180 bombek, a w mniejszych jest $13^1/_3$% tego, co w dużych. Liczba małych pudełek stanowi 20% liczby dużych pudełek, a w każdym dużym pudełku jest o 6 bombek więcej niż w małym. Ile jest pudełek każdego rodzaju?
18. Marek i Andrzej porównali swoje oszczędności, po czym Marek stwierdził: Razem mamy 500 złotych, ale gdyby moje oszczędności wzrosły o 20%, a twoje zmalały o 20%, mielibyśmy po równo pieniędzy. Jaką część oszczędności Andrzeja stanowi kwota posiadana przez Marka?
19. Pierwszy kran napełnia basen w ciągu 2 godzin, a drugi w ciągu 4 godzin. Basen opróżnia się przez otwór spustowy w ciągu 3 godzin. Pracownik zapomniał zakręcić zawór spustowy i rozpoczął napełnianie pustego basenu jednocześnie odkręcając oba krany.
20. W zawodach w ping-ponga wzięło udział 50 zawodników. Każdy zagrał z każdym. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów?
21. W butli jest 12 litrów wody. Połowę zawartości butli trzeba przelać do pustego naczynia, ale do przelewania możemy użyć tylko naczyń o pojemności 8 litrów i 5 litrów. Jak to zrobić?
22. Sylwia przygotowuje się do sprawdzianu z matematyki. Naukę rozpoczęła kilka minut po 17:00, a zakończyła przed 18:00. Gdy rozpoczynała i potem kończyła naukę, wskazówki zegara (minutowa i godzinowa) tworzyły kąt o mierze 110°. Ile minut poświęciła na naukę?
23. Uczniów biorących udział w teście do Olimpiady Matematycznej Juniorów należało rozmieścić w salach po równo, tak by w każdej sali były nie więcej niż 32 osoby. Kiedy w salach usadzono po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Kiedy z jednej sali zrezygnowano, miejsc wystarczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w teście i w ilu salach go pisali?
24. Czy liczba
    $-2-2\sqrt{2}+\sqrt{8}$
    jest wymierna?
25. Jaka jest cyfra jedności liczby 2018^{2019}?
26. Liczby x i y spełniają równanie : $(x-y)^2+(x+y-4)^2=0$. Ile wynosi iloczyn tych liczb?
27. Środek okręgu na rysunku oznaczono w puncie O. Wyznacz miarę kąta α.



28. Oblicz pole zakreskowanej części koła, jeżeli wiadomo, że każda z niezamalowanych części ma pole S.



29. Oblicz pole części wspólnej kwadratu o boku 4, którego środek jest punktem (0, 0), a boki są równoległe do osi układu współrzędnych, i trójkąta ABC, jeśli A(-3, -1), B(2, -1) i C(1, 5).
30. Liczba przekątnych pewnego wielokąta jest równa liczbie jego boków. Ile boków ma ten wielokąt?
31. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 4 razy większe od pola podstawy. Krawędź podstawy ma długość 6cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
32. Punkty P, Q, R, S są środkami odpowiednio krawędzi AD, CD, BC, AB czworościanu ABCD . Wykaż, że punkty P, Q, R i S są wierzchołkami równoległoboku.
33. Z graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wycięto graniastosłup prawidłowy trójkątny tnąc wzdłuż powierzchni równoległej do wysokości graniastosłupa i łącząc co drugi wierzchołek jak na poniższym rysunku. Objętość wyciętego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $20m^3$. Ile wynosi objętość początkowego graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego?
34. Najdłuższy odcinek łączący środek krawędzi sześcianu z jego wierzchołkiem ma długość 15cm. Oblicz objętość tego sześcianu.

Bibliografia:
1. Międzynarodowe zawody matematyczne Naboj, wyd. Omega
2. Liga zadaniowa, zadania wybrane, wyd. Aksjomat Toruń