X POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM"

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2018/2019

1. 95421
   Liczbę 360 można rozłożyć na czynniki . Na tej podstawie można utworzyć liczby, z których największą jest 95421.
2. 48
   Liczbę tę możemy zapisać w postaci: ; skoro r nie może być większe od 6, to n=48.
3. 27
   Mogą być to tylko liczby dwucyfrowe. Możemy zapisać:
   $3(a+b)=10a+b$
   $2b=7a$
   a więc b=7 i a=2 (a i b to cyfry).
4. 6301
   Ponieważ ostatnia cyfra liczby pierwszej nie może być parzysta, więc Piotr rozważał liczbe postaci 630*. Skoro ostatnią cyfrą nie może być 5, to pozostaje rozpatrzeć cztery możliwości dla ostatniej cyfry: 1,3,7,9. Liczba 630 jest podzielna przez 3, więc 6303 oraz 6309 również odrzucamy. 6307 jest podzielne przez 7, zatem jedyną możliwością pozostaje 6301.
5. 5
6. 17.06.2345
   Numer miesiąca każdego szczęśliwego dnia zawiera zero lub jest równy 12, więc numer roku nie zawiera 0 lub przekracza 3000. Rozważmy pierwszy z tych przypadków. Skoro pierwszą z cyfr DD może być tylko 0,1,2 lub 3, to najmniejszym możliwym rokiem jest 2145. Jednak wówczas numer dnia musiałby być równy 30, co nie jest możliwe, gdyż cyfra 0 musi wystąpić w numerze miesiąca. Kolejnym możliwym rokiem jest 2345 i okazuje się, że w roku tym jest dzień szczęśliwy. Pierwszą cyfrą numeru dnia musi być 1, skąd pierwszym możliwym numerem miesiąca jest 06. Przyjmując za numer dnia 17, uzyskujemy 17.06.2345.
7. 25
   Cena jednej tabliczki jest wspólnym dzielnikiem trzech liczb podanych w treści zadania. Skoro liczb tabliczek ma być najmniejsza, to ich cena musi być jak największa. Zatem musi być największym wspólnym dzielnikiem trzech liczb. zatem łączna liczba sprzedanych tabliczek wynosi:
   $\frac{270}{27}+\frac{189}{27}+\frac{216}{27}=25.$
8. 70, 140, 280
   Na mocy warunków zadania wiemy, że n dzieli $14\cdot 20=2^3\cdot 5\cdot 7$, skąd w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n występują jedynie liczby 2,5,7, przy czym 5 i 7 występują co najwyżej raz, natomiast 2 co najwyżej trzy razy. Ponieważ 14|20n, więc n jest wielokrotnością 7. Korzystając z podzielności 20|14n, wnioskujemy, że 10|n. Łącząc powyższe spostrzeżenia, otrzymujemy 70|n. Jedynymi liczbami spełniającymi powyższe warunki jest: 70,140,280.
9. 10
   Ponieważ w danym iloczynie mamy 2 i 5, więc ostatnią cyfrą na pewno będzie 0. Pozostaje rozważyć ostatnią cyfrę iloczynu:
   $3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37$

   która jest taka sama jak ostatnia cyfra iloczynu

$3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 7$

Skoro $3 \cdot 7 = 21$, to ostatni iloczyn ma taką samą cyfrę jedności co iloczyn $9 \cdot 9$, czyli 1.

10. 1111, 1221
Niech *abba* będzie szukanym palindromem. Ponieważ suma dwóch trzycyfrowych liczb nie przekracza 1998, więc a=1. Niech *1bb1* będzie równe $cdc + xyx$. Wtedy:
$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$
Ostatnia cyfra lewej strony to 1, więc ostatnia cyfra *c+x* to również 1. Skoro to
$1 \leq c \; i \; x \leq 9$
, to $c + x = 11$. Po wstawieniu i uproszczeniu powyższego wyrażenia dostajemy:
$11(b - 1) = d + y$
Prawa strona tej równości nie przekracza 18, więc jest równe 0 lub 1. Obie opcje są możliwe: 1111=505+606 oraz 1221=565+656.
11. I zadania nie rozwiązało 20% uczniów, II – 15%, III – 10% a IV – 2%. W sumie jakiegoś zadania mogło nie rozwiązać maksymalnie 47% uczniów, a więc co najmniej 53% rozwiązało wszystkie zadania. Z drugiej strony ponieważ 20% uczniów nie rozwiązało zadania I, więc wszystkie zadania rozwiązało co najwyżej 80% uczniów. Odpowiedź brzmi: między 53% a 80%.
12. Niech waga złowionych ryb wynosi x. Łatwo policzyć, że średnia waga ryb podarowanych cioci Halinie wynosi 7/ 60 x, a średnia waga ryb podarowanych sąsiadowi 5/ 60 x. Obliczamy wagę pozostałych ryb: 8 /13 · 65 /100 x = 0,4x Tych ryb musiało być 4, bo gdyby było więcej, byłyby średnio mniejsze od ryb podarowanych sąsiadowi, a gdyby było mniej, byłyby średnio większe od ryb podarowanych cioci Helenie. Ryb było więc w sumie 10.
13. Aby ułożyć równanie, które pozwoli rozwiązać zadanie wystarczy zauważyć, że pierwszy syn dostał 1/ 6 diamentów (dostali po równo, więc każdy dostał 1/ 6). Oznaczmy liczbę diamentów przez x. Wówczas: 1 + 1 /7 (x − 1) = 1/ 6 x Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 36.
14. Gdy dodamy do siebie liczbę uczniów, którzy spędzili wakacje nad morzem oraz tych, którzy wyjechali w góry, to okaże się, że stanowią oni 14 /15 uczniów szkoły. Pozostali stanowią więc 1/ 15 uczniów tej szkoły. Gdy obliczymy 1 /15 z 1/ 15 to dostaniemy 1/ 225 uczniów tej szkoły (tylu wyjechało za granicę). Aby ta liczba była całkowita, w szkole musi być co najmniej 225 uczniów.
15. Drugiego dnia czas poświęcony na tankowanie stanowił 20% czasu poświęconego na jazdę. 60 minut stanowi więc 120% czasu poświęconego na jazdę. Można teraz obliczyć, że czas poświęcony na jazdę to 50 min.
16. Oznaczmy przez o liczbę ołówków oraz przez a, b, c liczby uczniów odpowiednich klas. Z warunków zadania wiemy, że o = 16(a + b + c), o = 48a i o = 40b. Chcemy znaleźć wartość wyrażenia o/c. Podstawiając a=o/48 i b=o/40 w pierwszym równaniu, dostajemy
o = 16 (o /48 + o/ 40 + c), o = o/3 + 2o/5 + 16c, 4o/ 15 = 16c, o/c = 60
17. Dużych pudełek jest pięć razy więcej niż małych, w dużych pudełkach jest razem 180 bombek, w małych pudełkach jest $13^{1}/_{3}\%$ z 180 = 40/300 · 180 = 24 bombek. Gdyby była jednakowa liczba pudełek małych i dużych, to w małych pudełkach byłoby 24 . 5 =120 bombek. 180 - 120 = 60, czyli w dużych pudełkach jest o 60 bombek więcej, a w każdym dużym jest o 6 więcej niż w małym, więc 60 : 6 = 10. Dużych pudełek jest 10 a małych 2, bo 10 : 5 = 2.

X POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM”

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2018/2019

18. Do rozwiązania zadania nie trzeba wiedzieć, ile pieniędzy mają chłopcy. Mamy bowiem 1,2M=0,8A, czyli 3/2M = A, zatem M = 2/3 A, więc kwota posiadana przez Marka stanowi 2/3oszczędności Andrzeja.
19. Pierwszy kran napełnia w ciągu godziny 1/2 basenu, a drugi 1/4. Natomiast przez otwór spustowy w ciągu godziny wypływa ilość wody stanowiąca 1/3 objętości basenu. Załóżmy, że po otwarciu obu kranów i nie zamknięciu otworu spustowego basen napełnia się w ciągu x godzin, czyli w ciągu godziny napełnia się 1/x część objętości basenu. Zachodzi zatem 1/x = 1/2 + 1/4 – 1/3 = 5/12. Stąd x = 22/5, czyli basen napełni się w ciągu 2 godzin i 24 minut.
20. Odp. Nie jest to możliwe. Wszystkich meczy rozegrano 50·49 /2 . Jest to liczba niepodzielna przez 50.
21. Można przyjąć, że zapis $[x, y, z]$ oznacza: w butli jest x litrów wody, w naczyniu ośmiolitrowym y litrów, a w naczyniu pięciolitrowym z litrów. Na początku więc mamy [12, 0, 0]. Kolejne przelewania mogą wyglądać tak: [12, 0, 0] – [4, 8, 0] – [4, 3, 5] – [9, 3, 0] – [9, 0, 3] – [1, 8, 3] – [1, **6**, 5]
22. W ciągu m minut wskazówka minutowa pokonuje kąt m·(360°/60) = 6m stopni, a godzinowa kąt m·(360°/(60·12)) = 0,5m stopni. O 17:00 wskazówki tworzą kąt 5·(360°/12) = 150°. Niech m_1 to czas, jaki musi upłynąć, by wskazówki utworzyły kąt o mierze 110°. Wskazówka minutowa 'goni' wtedy godzinową, więc $150^0 – 6m_1 + 0,5m_1 = 110^0$. Stąd m_1 = 80/11. Niech m_2 oznacza czas, jak musi upłynąć, by wskazówki ponownie utworzyły kąt 110^0 . Stanie się to po przegonieniu wskazówki godzinowej przez minutową, a więc $150 – 6m_2 +0.5m_2 = -110$. Stąd m_2 = 520/11. Czas poświęcony przez Sylwię na naukę to $m_2 – m_1$ = 520/11 – 80/11 = 440/11 = 40 minut.
23. Niech s oznacza liczbę początkowo użytych sal. Rezygnacja z jednej sali oznacza, że 23 osoby (22 z tej sali i jedna osoba, dla której zabrakło miejsca) muszą zostać rozlokowane po równo pomiędzy pozostałe s-1 sal. Stąd (s-1) | 23. Zatem s-1 = 23 lub s-1 = 1. Drugi przypadek odrzucamy, bo wtedy liczba uczestników po przeniesieniu ich do jednej sali byłaby zbyt duża (45>32). Stąd s-1=23 i jest to liczba sal, do których przeniesiono po 1 uczestniku. Zatem w konkursie brało udział 23·(22+1) = 529 osób

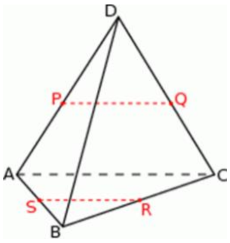
24. Tak
25. 2
26. x=0, y =0,   xy =0
27. 70^0
28. $$2S \cdot \frac{\pi + 2}{\pi - 2}$$
29. 10,5
30. 5
31. Pb=4·Pp

    4·1/2·6h=4·36

    h=12cm-wysokość ściany bocznej   z tw. Pitagorasa H=4√5

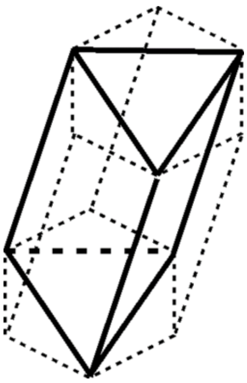
    $V=48\sqrt{5}cm^3$

32.



Zauważmy, że odcinek PQ łączy środki boków w trójkącie ACD , czyli jest równoległy do krawędzi AC i $PQ = \frac{AC}{2}$. Analogicznie, odcinek SR łączy środki boków w trójkącie ABC , czyli jest równoległy do AC i $SR = \frac{AC}{2}$. W takim razie odcinki PQ i SR mają równe długości i są równoległe (bo oba są równoległe do AC), czyli czworokąt PQRS jest równoległobokiem.

33.



Pole podstawy jednego odciętego graniastosłupa

$h_p=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $P_p=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$;

Objętość trzech odciętych graniastosłupów

$3V=3\cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=20cm^3$, ponieważ objętość wyciętego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $20m^3$.

Objętość początkowego graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego=20+20=$40cm^3$

34. a-długość krawędzi sześcianu ABCDEGGH,
EB -przekątna ściany bocznej EB=a√2,
K -środek krawędzi EH, trójkąt EKB jest prostokątny,
stosujemy tw. Pitagorasa i a=10, czyli $V=1000cm^3$