

VIII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH  
**„W POGONI ZA INDEKSEM”**  
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE  
rok szkolny 2016/2017



1. W klasie, na pewnej lekcji, liczba nieobecnych uczniów stanowiła  $\frac{1}{6}$  liczby obecnych. Po przerwie wyszedł jeden uczeń i wtedy liczba nieobecnych stanowiła  $\frac{1}{5}$  obecnych. Ilu uczniów liczy ta klasa?
2. Piotr wykonuje pewną pracę w ciągu 10 godzin, Zbyszek wykonuje tę samą pracę w ciągu 12 godzin, zaś Mirek wykonuje tę pracę w ciągu 8 godzin. Piotr, Zbyszek i Mirek rozpoczynają wykonywać razem tę pracę o godz. 8:00 rano. Czy wykonają ją przed przerwą obiadową, która zaczyna się o godzinie 12.00?
3. Wykaż, że jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną, to liczba  $n^4 + 2n^3 + n^2$  jest podzielna przez 4.
4. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

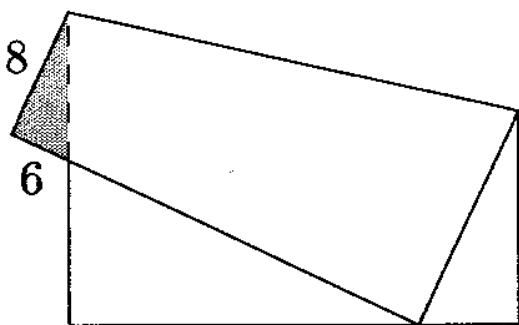
$$x \cdot y \cdot (x + 2015y) = 2015^{2016}$$

5. Na tablicy zapisujemy liczby od 1 do 10. Ścieramy dwie liczby i w ich miejsce wpisujemy ich sumę pomniejszoną o 1. Wykonujemy tę operację tyle razy, aż na tablicy tylko jedna liczba. Co to za liczba? Uzasadnij, że zawsze będzie ta sama.
6. Ile dzielników ma liczba  
 $2^2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 + 2^3 \cdot 3^7$  ?
7. Kogut kosztuje 5 monet, kura 3 monety, a za jedną monetę można kupić 3 kurczęta. Za 100 monet kupiono 100 ptaków. Ile było wśród nich kogutów, kur i kurcząt?
8. Wykaż, że liczba  $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{998} + 3^{999}$  jest podzielna przez 13.
9. W 1845 r. pan Walenty obchodził swoje urodziny. Powiedział wtedy: „Gdy mój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez mój wiek za 15 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. Ile lat ma jubilat?
10. W ubiegłym roku średnia wieku nauczycieli w szkole była równa ich liczbie. W tym roku jeden z pedagogów przeszedł na emeryturę, mając 62 lata. Mimo tego średnia wieku nadal jest równa liczbie nauczycieli. Ilu nauczycieli pracowało w szkole w tym roku?
11. Cenę towaru podniesiono najpierw o 30%, a po pewnym czasie tę nową cenę obniżono o 15%. O ile procent wzrosła cena początkowa w wyniku obu zmian?
12. Pan Jurek ma w portfelu tylko banknoty o nominałach 100 zł i 200 zł i nie ma monet. Pan Jurek obliczył sobie, że średnia arytmetyczna wartości wszystkich banknotów wynosi 120 zł. Oblicz, jakim procentem wszystkich banknotów w portfelu są banknoty o nominale 100 zł.
13. Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru, za każdym razem o tyle samo procent, jego cena końcowa stanowiła 64% ceny początkowej. O ile procent każdorazowo obniżano cenę tego towaru?
14. W klasie 1a połowa uczniów gra w tenisa, 40% w siatkówkę, 10% uprawia obie dyscypliny. Jaka część uczniów klasy nie uprawia żadnej z wymienionych dyscyplin sportu?
15. Pewna kobieta żyła 90 lat. Iloczyn wszystkich czterech cyfr roku jej urodzenia jest równy 72. Rok śmierci różni się od roku urodzenia jedynie kolejnością dwóch środkowych cyfr, które są kolejnymi liczbami naturalnymi. Oblicz rok urodzenia się tej kobiety, jeśli pierwsza cyfra roku jej urodzenia jest równa 1. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.
16. Piotrek miał pełną szklankę soku pomarańczowego. Wypił  $\frac{1}{2}$  tego soku i dołął w to miejsce wody do pełna. Następnie wypił 50% zawartości szklanki i ponownie uzupełnił ją wodą. Oblicz ile szklanek wody wypił Piotrek, jeśli ostatnią szklankę napoju wypił do dna.

VIII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH  
„W POGONI ZA INDEKSEM”  
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE  
rok szkolny 2016/2017

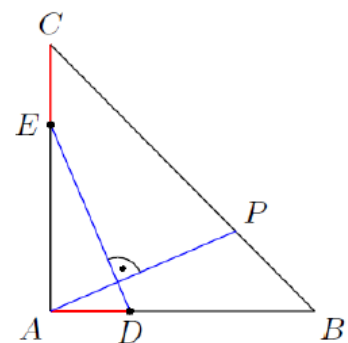


17. Na egzaminie w pewnej szkole 12% uczniów nie rozwiązało zadania z geometrii, 32% uczniów zaczęło, ale otrzymało niepoprawny wynik, a 14 uczniów rozwiązało zadanie poprawnie. Ilu uczniów pisało egzamin w tej szkole?
18. Kiedy Emil kupił swój pierwszy sportowy samochód i zatankował do pełna, za 50 litrów paliwa zapłacił 40 euro. Kiedy po kilku latach kupił samochód rodzinny i zatankował do pełna, za 40 litrów paliwa zapłacił 50 euro. O ile procent podrożało paliwo w tym czasie?
19. W świeżych grzybach woda stanowi 95 % ich masy. Zawartość wody w suszonych grzybach wynosi 5 % ich masy. Ile trzeba zbierać świeżych grzybów, aby otrzymać 4 kg suszonych grzybów?
20. Wewnątrz kwadratu umieszczono pięciokąt foremny. Ile wynosi  $x$ ?



21. Kwadratowa kartka papieru jest zgięta w taki sposób, że jeden z jej wierzchołków leży dokładnie na jednej z krawędzi kartki. Jak pokazano na rysunku, pewien trójkąt wychodzi poza wyjściowy kwadrat. Długości dwóch boków tego trójkąta zaznaczono na rysunku. Oblicz długość boku kartki.

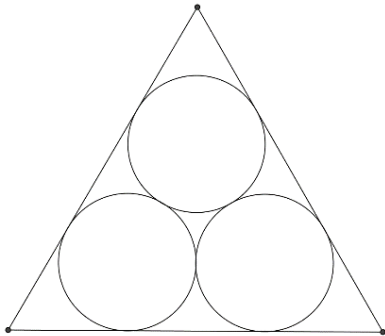
22. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $\sphericalangle A = 90^\circ$  oraz  $AB = AC$ . Punkty  $D$  i  $E$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AC$ , przy czym  $AD = CE$ . Prosta przechodząca przez punkt  $A$  i prostopadła do prostej  $DE$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że  $AP = DE$ .
23. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C$ . Na przeciwprostokątnej  $AB$



VIII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH  
**„W POGONI ZA INDEKSEM”**  
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE  
rok szkolny 2016/2017



tego trójkąta wybrano takie punkty  $D$  i  $E$ ,  
że zachodzą równości  $AD = AC$  i  $BE = BC$ . Oblicz długość odcinka  $DE$ .



24. Dane są trzy parami styczne zewnętrznie okręgi o promieniu 1. Wyznacz pole trójkąta, którego boki są odcinkami stycznych

25. Na płaszczyźnie dane są punkty  $A, B, C, D$ . Punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AC$ , oraz  $|AB| = |BC| = |BD| = 17$  i  $|AD| = 16$ . Oblicz długość odcinka  $CD$ .
26. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  odłożono takie odcinki  $AD$  i  $BE$ , że  $AD = AC$  i  $BE = BC$ . Wyznacz miarę kąta  $DCE$ .
27. W okrąg o promieniu  $r$  wpisano trójkąt równoramienny, którego podstawa też ma długość  $r$ . Oblicz pole tego trójkąta.
28. W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej wysokość jest 2 razy większa od krawędzi podstawy. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe polu powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi 5 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
29. Środki sąsiednich ścian sześcianu i jeden ze wspólnych wierzchołków tych ścian wyznaczają trójkąt. Oblicz miary jego kątów.
30. Punkty  $K, L, M$  są środkami krawędzi  $BC, GH$  i  $AE$  sześcianu  $ABCDEFGH$  o krawędzi długości 1. Oblicz pole trójkąta  $KLM$ .
31. Podstawą ostrosłupa  $ABCDW$  jest prostokąt. Krawędź boczna  $DW$  jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne  $AW, BW, CW$  mają długości  $AW=6, BW=9, CW=7$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
32. Akwarium o wysokości 25cm napełniono wodą tak, że od górnej krawędzi akwarium do poziomu wody jest 5cm. Jaką część objętości akwarium stanowi objętość wody?

LITERATURA:

„Na olimpijskim szlaku” zadania dla kółek matematycznych w szkołach podstawowych i gimnazjach  
H.Pawłowski,

„Liga zadaniowa”- zbiór zdań dla uczniów zainteresowanych matematyką Z.Bobiński, P. Nodzyński,  
M.Uscki

„Koło Matematyczne w Gimnazjum”- Z. Bobiński; P. Nodzyński; M. Uscki