

VII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM”

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2016/2017



- 30
 - Tak
 -
 - Równanie nie ma rozwiązania. Lewa strona nie równa się prawej dla żadnej pary liczb x, y ponieważ prawa strona jest nieparzysta a prawa parzysta. Należy wykazać parzystości stron równania
 - suma 46
 - 24
 - 0 kogutów, 25 kur, 75 kurcząt lub
4 18 78 lub
8 11 81 lub
12 4 84
- Uwaga ! (100 ptaków nie oznacza, że muszą się wśród nich znaleźć przedstawiciele wszystkich gatunków).
- - x - wiek p. Walentego w 1845 roku
 $(x-15)(x+15) = 1845 - x$
Po przekształceniu równania otrzymamy
 $x(x+1) = 2070$
a z tego $x=45$
Odp. Jubilat ma 45 lat.
 - x - liczba nauczycieli w ubiegłym roku
 x^2 - suma lat wszystkich nauczycieli w ubiegłym roku
 $x^2 + x$ - suma lat wszystkich nauczycieli w tym roku
 $x^2 + x - 62$ - suma lat wszystkich nauczycieli w tym roku po odejściu jednego na emeryturę
- $$\frac{x^2 + x - 62}{x - 1} = x - 1$$
- $$x^2 + x - 62 = (x - 1)^2$$
- $$x^2 + x - 62 = x^2 - 2x + 1$$
- $$3x = 63$$
- $$x = 21$$
- Odp. W tym roku w szkole pracowało 20 nauczycieli.
- O 10,5 %
 - x - liczba banknotów 100zł
 y - liczba banknotów 200zł
 $x + y$ - liczba wszystkich banknotów

VII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM”

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2016/2017



$$\frac{x}{x+y} \cdot 100\% \quad \text{taki \% wszystkich banknotów stanowią banknoty 100zł}$$

$$\frac{100x + 200y}{x+y} = 120$$

Z tego równania $x=4y$

zatem

$$\frac{4y}{4y+y} \cdot 100\% = \frac{4y}{5y} \cdot 100\% = 80\%$$

Odp. 80 %

13. x - cena towaru

k - szukany procent obniżki

$x - k\%x$ -cena towaru po pierwszej obniżce

$x - k\%x - k\% (x - k\%x)$ -cena towaru po pierwszej obniżce

$x - k\%x - k\% (x - k\%x) = 0,64x$

$x = 20\%$

Odp. Cenę każdorazowo obniżano o 20%

14. 20%

15. Rozkład liczby 72: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Rok urodzenia i śmierci jest liczbą czterocyfrową, więc

możemy brać pod uwagę następujące czwórki cyfr: 1, 2, 4, 9; 1,3,4,6; 1,2,6,6 oraz 1,1,8,9.

Jeśli kobieta żyła 90 lat, to nie mogła się urodzić i umrzeć na przestrzeni tego samego wieku, gdyż

rok jej urodzenia zawierałby wówczas cyfrę 0, a co za tym idzie iloczyn cyfr wynosiłby 0. Biorąc

również pod uwagę fakt, że środkowe cyfry są kolejnymi liczbami naturalnymi, możemy brać pod

uwagę tylko dwie czwórki cyfr: 1,3,4,6 oraz 1,1,8,9. Kobieta ta mogła urodzić się w roku 1891 i

umrzeć w 1981 lub urodzić się w roku 1346 i umrzeć w 1436.

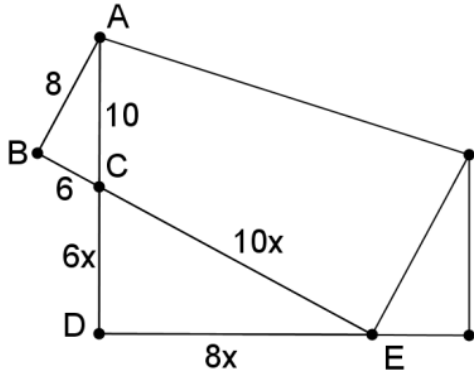
16. 1 szklanę

17. 25

18. O 56,25%

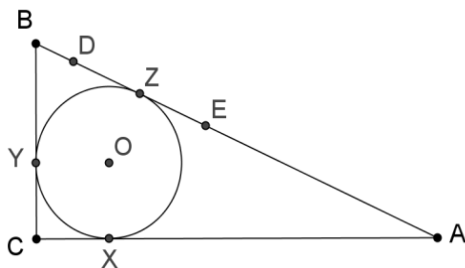
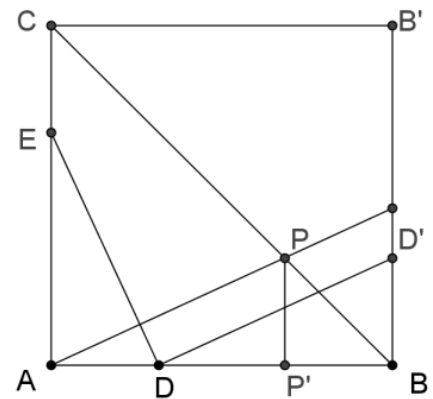
19. 76 kg

20. $x=54^\circ$



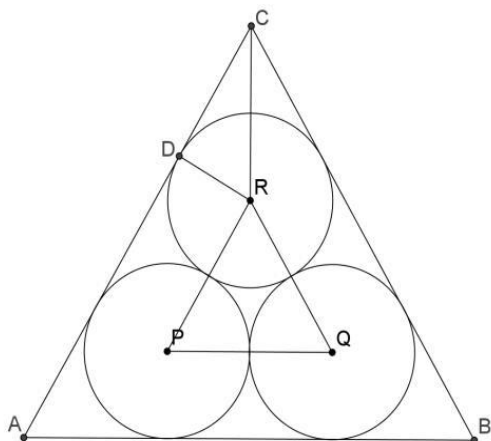
21. Z Pitagorasa liczymy długość odcinka AC – wynosi ona 10. Trójkąty ABC i CDE są podobne – obydwa są prostokątne i kąty BCA i DCE są wierzchołkowe, stąd oznaczenia jak na rysunku. Odcinek BE i łamana DAB mają jednakowe długości, bo są to boki kwadratowej kartki. Stąd równość: $6+10x=6x+10+8$ $x=3$ Bok kwadratu ma $6+10x$ czyli 36.

22. Obróćmy nasz trójkąt o 90° wokół środka przeciwprostokątnej BC . Wówczas punkt E przejdzie na punkt D , a punkt D na punkt D' , jak na rysunku. Trójkąty ADE i DBD' są więc przystające. Wystarczy teraz wykazać przystawanie trójkątów DBD' i APP' . Mają one jednakowe kąty (są prostokątne i $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle AED = \sphericalangle BDD'$) oraz $BD' = P'P$ bo czworokąt $P'DD'P$ jest kwadratem.



23. Oznaczmy Przez X, Y, Z punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami AC, BC, AB . Czworokąt $CXOY$ jest kwadratem o boku 1 (promienie są prostopadłe do stycznych, boki OY i OX są równe jako promienie). Wiemy, że $AD = AC$, dodatkowo z twierdzenia o stycznej $AZ = AX$. Z tego

wynika, że $DZ = CX = 1$. Podobnie pokażemy, że $ZE = 1$. Długość odcinka DE wynosi 2.



24.

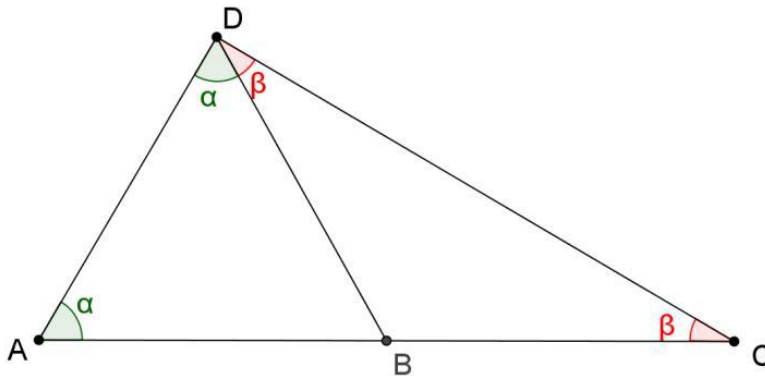


Trójkąt RDC jest trójkątem $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (odcinek RC zawiera się w dwusiecznej kąta 60° , promień RD jest prostopadły do stycznej AC). Wynika stąd, że odcinek RC ma długość 2, a odcinek $DC: \sqrt{3}$. Teraz łatwo policzyć bok trójkąta ABC . Ma on długość $2+2\sqrt{3}$. Na wysokość trójkąta ABC składa się długość promienia okręgu, wysokość trójkąta PQR i długość odcinka RC , w sumie $1+\sqrt{3}+2=3+\sqrt{3}$.

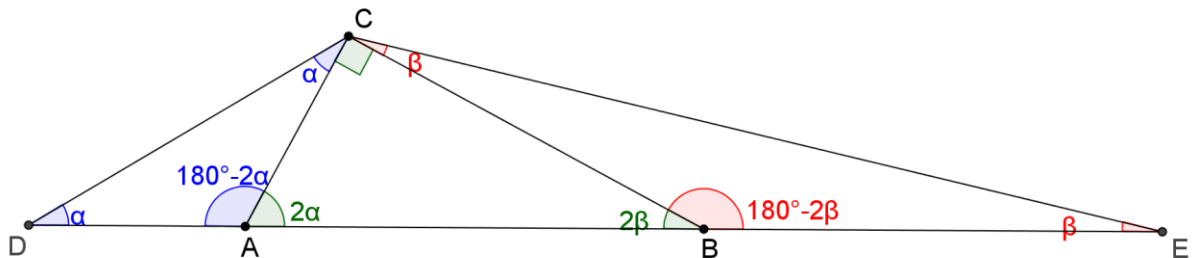
Możemy liczyć pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (2+2\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})$$

25. Trójkąty ABD i BCD są równoramienne, mają więc równe kąty przy podstawie, jak to zaznaczono na rysunku. W trójkącie ACD mamy $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, czyli $\alpha + \beta = 90^\circ$. Jest to więc trójkąt prostokątny. Możemy więc skorzystać z twierdzenia Pitagorasa i obliczyć długość boku CD . Wynosi ona 30.

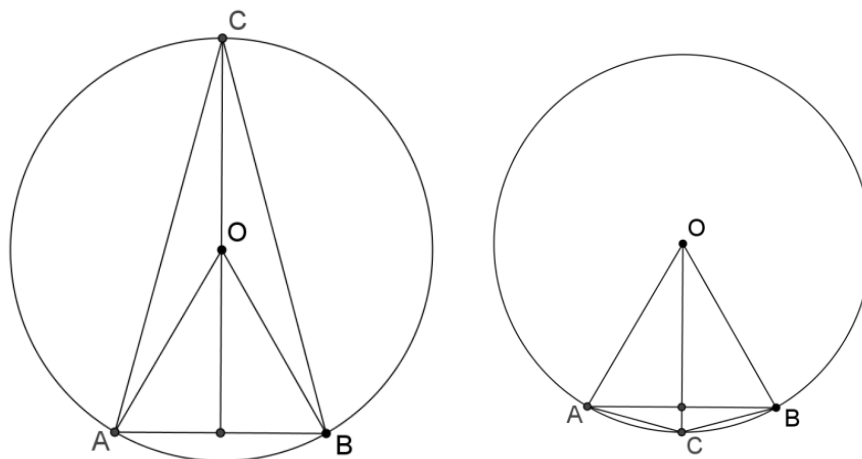


26.



Trójkąty ACD i BCE są równoramienne, więc kąty ADC i DCA są równe (oznaczyliśmy je przez α) oraz kąty BEC i BCE są równe (kąty β). Można obliczyć, że miara kąta CAB wynosi 2α , a miara kąta $CBA - 2\beta$ (zob. rysunek). Z sumy kątów w trójkącie ABC wynika, że $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$, więc $\alpha + \beta = 45^\circ$, a to oznacza, że kąt DCE ma miarę 135° .

27. Zadanie ma 2 rozwiązania:



a) wysokość trójkąta ABC jest sumą wysokości trójkąta równobocznego ABO i promienia OC i ma długość $h=r\sqrt{3}/2+r$ oraz pole $P=1/2 \cdot r \cdot (r\sqrt{3}/2+r)$

b) wysokość trójkąta ABC jest różnicą promienia OC i wysokości trójkąta równobocznego ABO i ma długość $h=r-r\sqrt{3}/2$ oraz pole $P=1/2 \cdot r \cdot (r-r\sqrt{3}/2)$

28. $V=30\sqrt{15}$

29. Trójkąt jest równoboczny, czyli jego kąty mają miarę 60° .

30. $P=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

31. $V=24\sqrt{10}$

32.

$\frac{4}{5}$