IX POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM"

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2017/2018

1. Niech pierwsza osoba dostanie 1, druga 2 następni odpowiednio 3 , 4 aż do n monet.

   Więc $1+2+3+4+\ldots\ldots+n \le 2017$,

   $\frac{n(n+1)}{2} \le 2017$

   $n(n+1) \le 4034$, gdzie $n(n+1)$ to iloczyn kolejnych liczb naturalnych.

   Warunek spełnia dla największego n , n=63 a n+1=64

   (bo $63*64=4032 \le 4034$).

   Odp. Zgodnie z zasadami można obdarować 63 osoby, nadliczbowe 2 monety można dać temu, kto dostał ich najwięcej.

2. Odp. 1984 i 1920
3. Odp. 5
4. Odp. Reszta 3
5. Budujemy równanie $1887 - (1+8+x+y)=1800+ 10x +y$, gdzie x i y ≤ 9

   $78=11x+2y$

   $x=6, \ y=6$

   Odp. Urodził się w 1866 roku i ma 21 lat
6. Rycerzowi nie uda się zabić smoka. Przy każdym cięciu „przyrost głów" jest liczbą podzielną przez 3. Niezależnie od sposobu cięcia , różnica między liczbą głów , które wyrosły smokowi, jest podzielna przez 3, a więc nie może ona być równa 2000.
7. Odp. $\frac{4009}{4016016}$
8. 2^{22}
9. Odp. $P= 2a^2(\sqrt{2} -1)$
10. x- wiek p. Walentego w 1845 roku

    $(x-15)(x+15) = 1845 - x$

    Po przekształceniu równania otrzymamy

    $x(x+1)= 2070$

    a z tego $x=45$

    Odp. Jubilat ma 45 lat.
11. x- liczba nauczycieli w ubiegłym roku

    x^2- suma lat wszystkich nauczycieli w ubiegłym roku

    $x^2 + x$ - suma lat wszystkich nauczycieli w tym roku

    $x^2 + x - 62$ - suma lat wszystkich nauczycieli w tym roku po odejściu jednego na emeryturę

    Odp. W tym roku w szkole pracowało 20 nauczycieli.
12. Odp. O 10,5 %
13. Odp. 76 kg
14. x- liczba banknotów 100zł

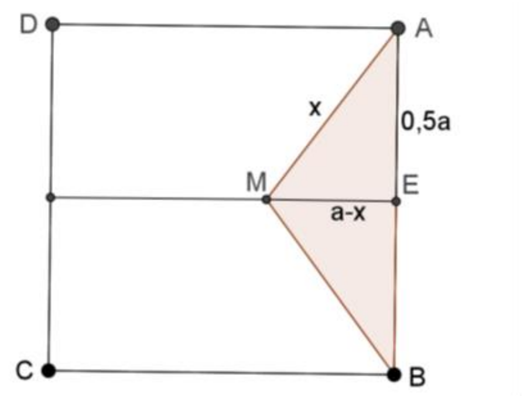
    y - liczba banknotów 200zł

    x + y - liczba wszystkich banknotów

    taki % wszystkich banknotów stanowią banknoty 100zł

Z tego równania x=4y
Zatem Odp. 80 %

15. x- cena towaru
    k- szukany procent obniżki
    x- k%x -cena towaru po pierwszej obniżce
    x- k%x – k% (x- k%x) -cena towaru po pierwszej obniżce
    x- k%x – k% (x- k%x)= 0,64x
    x= 20%
    Odp. Cenę każdorazowo obniżano o 20%
16. Odp.20%
17. Odp. 25
18. Odp. Po 2 godzinach.
19. Odp. 1 szklankę
20. Rozkład liczby 72: 72 = 2 □ 2 □ 2 □ 3 □3. Rok urodzenia i śmierci jest liczbą czterocyfrową, więc możemy brać pod uwagę następujące czwórki cyfr: 1, 2, 4, 9; 1,3 ,4, 6; 1, 2, 6, 6 oraz 1, 1, 8, 9. Jeśli kobieta żyła 90 lat, to nie mogła się urodzić i umrzeć na przestrzeni tego samego wieku, gdyż rok jej urodzenia zawierałby wówczas cyfrę 0, a co za tym idzie iloczyn cyfr wynosiłby 0. Biorąc również pod uwagę fakt, że środkowe cyfry są kolejnymi liczbami naturalnymi, możemy brać pod uwagę tylko dwie czwórki cyfr: 1,3 ,4, 6 oraz 1, 1, 8, 9. Kobieta ta mogła urodzić się w roku 1891 i umrzeć w 1981 lub urodzić się w roku 1346 i umrzeć w 1436
21. Odp. O 56,25%
22. Tak
    Niech koło ma promień r.
    Pole boczne stożka wynosi , więc r=l. Podstawa tego stożka ma promień , zatem z drugiego półkola można wyciąć podstawę tego stożka.
23. 25π
24.



Oznaczmy bok kwadratu przez a, a odległość punktu M od wierzchołka A przez x. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AME dostajemy: $(0{,}5a)^2 + (a-x)^2 = x^2$

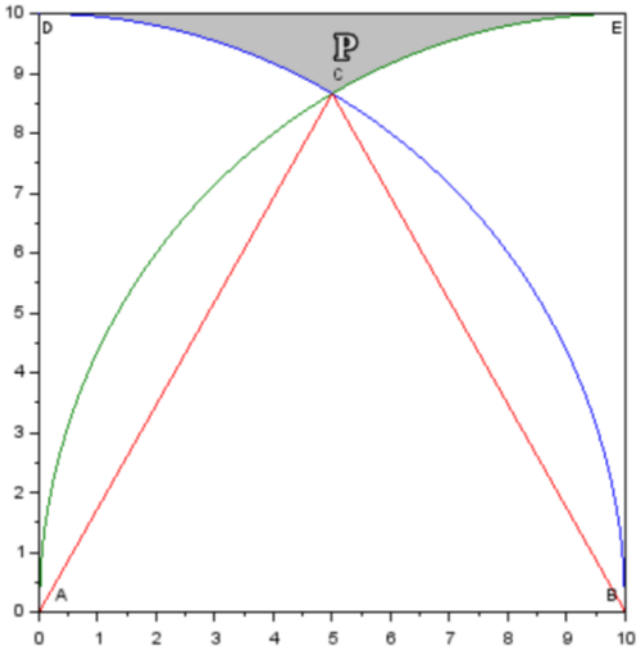
$$x = \frac{5}{8}a$$

$$a - x = \frac{3}{8}a$$

Teraz możemy liczyć pole trójkąta ABM

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{8}a = \frac{3}{16}a^2$$

25.



Zakładamy, ze pierwszy punkt przywiązania kozy znajduje się w rogu łąki oznaczonym przez A. Część łąki która ma w zasięgu koza ma kształt wycinka koła o promieniu 10 m i kącie środkowym 90^o.
Powierzchnia tego wycinka wynosi

$$P_1 = \frac{90^o}{360^o} \cdot \pi \cdot 10^2 m^2$$

Koza zjadła trawę z tego obszaru w ciągu 75 dni, więc dziennie zjadała w przybliżeniu

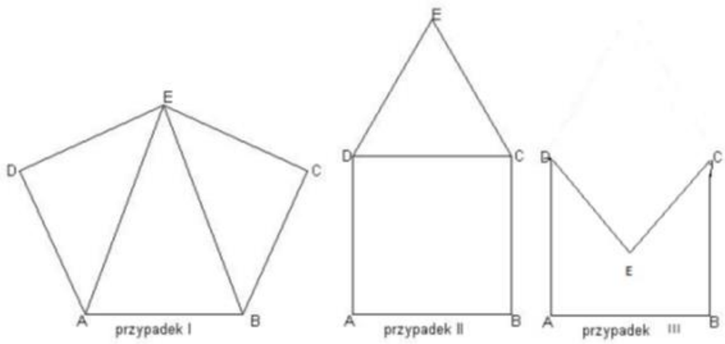
$$P_1 = \frac{90^o}{360^o} \cdot \pi \cdot 10^2 m^2 \ \frac{25 \cdot \pi}{75} m^2 = \frac{\pi}{3} m^2 = 1{,}047 m^2$$

Po 75 dniach koza została przywiązana w punkcie B i miała w zasięgu trawę w obszarze ograniczonym łukami miedzy punktami A i C oraz punktami C i E oraz granicą łąki. Część łąki, która zostanie po odwiązaniu kozy ograniczona jest łukami miedzy punktami C i D i punktami C i E oraz górną granicą działki. Pole tej części łąki można obliczyć odejmując od pola całkowitego łąki pole trójkąta równobocznego ABC i pola dwóch wycinków koła o promieniu 10m i kącie środkowym 30o (na rysunku są to wycinki ACD i BCE). Tak więc, pole powierzchni łąki z trawą po odwiązaniu kozy jest równe :

$$P = 10^2 m^2 - \frac{10^2\sqrt{3}}{4} m^2 - 2 \cdot \frac{30^o}{360^o} \cdot \pi \cdot 10^2 m^2 = \ldots = 4{,}42 m^2$$

Dzieląc tę powierzchnię przez ilość trawy którą koza zjada dziennie otrzymujemy 4 całe dni.

26. $960 cm^3$
27.



$$P_I = \left(100 + 25\sqrt{7}\right)\ cm^2$$

$$P_{II} = 25 \cdot (4 + \sqrt{3}) cm^2$$

$$P_{III} = 25 \cdot (4 - \sqrt{3}) cm^2$$

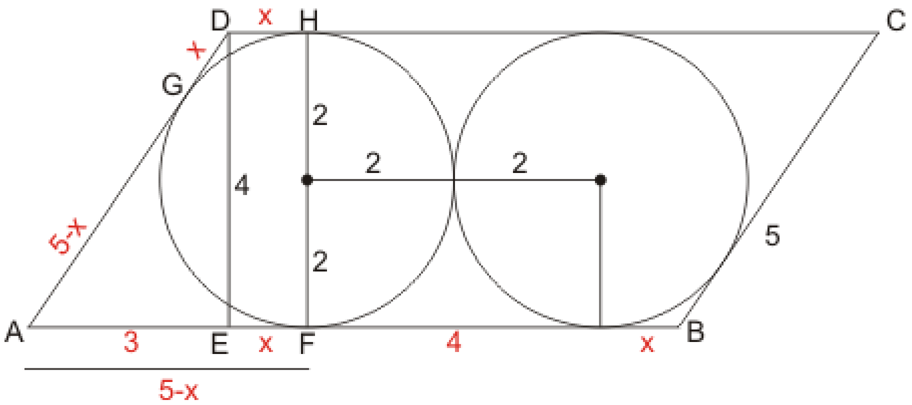
28. ----
29. h=2cm

30.

Obliczenie wysokości zbiornika wody $\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=12\ dm$ - wysokość stożka
24 dm – wysokość walca
24 dm + 12 dm = 36 dm – wysokość zbiornika wody
Obliczenie wysokości słupa wody na początku oraz po 10 dniach
$2/3\cdot 36\ dm=24\ dm$ – wysokość słupa wody na początku
$1/6\cdot 36\ dm=6\ dm$ – wysokość słupa wody po 10 dniach
Obliczenie objętości wody na początku

$Vwalca+Vstożka=3{,}14\cdot 5^2\cdot 12+1/3\cdot 5^2\cdot 3{,}14\cdot 12=3{,}14\cdot 12\cdot 1003=3{,}14\cdot 400=1256\ dm^3$
Obliczenie objętości wody po 10 dniach
Z podobieństwa trójkątów prostokątnych: $12/6=5/r$, wtedy $r=2{,}5$
$Vstożka=1/3\cdot(2{,}5)^2\cdot 3{,}14\cdot 6=6{,}25\cdot 3{,}14\cdot 2=39{,}25\ dm3$
Wyznaczenie średniego zużycia wody dziennie
$1256\ dm^3-39{,}25\ dm^3=1216{,}75\ dm^3$
$1216{,}75\ dm^3:10=121{,}675\ l$
Odp. Średnie zużycie wody dziennie w tym czasie to 121,675 l

31.



Długości odcinków GD i AG
Ponieważ dowolny punkt jest równoodległy od okręgu, więc odcinki DG i DH maja długość x. Podobnie odcinki AG i AF są równej długości wynoszącej 5-x gdyż odcinek AD ma długość 5.
Długość odcinka AE
Z trójkąta prostokątnego ADE obliczamy, że odcinek AE ma długość 3.
Długość odcinka EF
Ponieważ DEFH jest prostokątem, więc EF ma długość x.
Ile wynosi długość odcinka x
Zatem z odcinka AF mamy równość:
$3+x = 5-x$
$2x = 2$
$x = 1$
Długość boku AB

|AB| = 3 + 1 + 4 + 1 = 9
Obwód równoległoboku
Ob = 2 * (9+5) = 2 * 14 = 28

32. P=11/12